7. Exercices d'entraînement et de préparation au DS

Révisions sur parité, imparité.

Exercice 7.A Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

1. Tracer la courbe représentative de f sur une calculatrice, et émettre une conjecture sur la parité de f
2. Démontrer cette conjecture.

Exercice 7.B Pour cet exercice, vous admettrez (provisoirement) que la fonction inverse : $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
Soient f et g les fonctions définies sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{3}{x}$ et $g(x) = \frac{-2}{x}$.

1. Justifier que f et g sont impaires
2. Sur $]0;+\infty[$, étudier le sens de variation de f et de g. Pourquoi suffit-il de l'étudier sur cet intervalle ?
3. Dresser le tableau de variations de f et g sur leur ensemble de définition
4. Contrôler vos résultats par un tracé à la calculatrice.

Sur les variations de fonctions en général :

Exercice 7.C Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-2;7]$. On sait que :

- f est croissante sur $[-2;5]$ et sur $[6;7]$
- f est décroissante sur $[5;6]$
- $f(-2) = f(6) = -1$ et $f(5) = f(7) = 1$

1. Construire le tableau de variation de f
2. Tracer dans un repère une courbe pouvant représenter f

Exercice 7.D Pour cet exercice, vous admettrez (provisoirement) que la fonction carré : $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

1. Étudier sur $[0;+\infty[$ le sens de variation des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :
   (a) $f(x) = 2x^2$
   (b) $g(x) = -\frac{1}{2}x^2$
2. En déduire leur sens de variation sur $\mathbb{R}$

Exercice 7.E Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[1;6]$. Tracer dans un repère une courbe passant par les points $A(1;3)$ et $B(6;-1)$ et pouvant représenter f dans les cas suivants :

1. f est décroissante sur $[1;6]$
2. f n'est pas croissante sur $[1;6]$

Exercice 7.F Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.

1. Si la fonction f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$, alors elle est décroissante sur $\mathbb{R}$.
2. Si la fonction f est croissante sur $[-5;5]$, alors elle est croissante sur $[0;1]$
3. Si la fonction f est croissante sur $[-5;0]$ et décroissante sur $[0;5]$, alors f est constante sur $[-5;5]$

Exercice 7.G On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[-2;6]$ par $g(x) = (x-3)^2 + 1$

1. A l'aide d'une calculatrice, faire une conjecture sur les variations de g et sur son minimum.
2. (a) Montrer que pour tout réel x de $[-2;6]$, $g(x) - g(3) = (x-3)^2$
   (b) Quel est le signe de $g(x) - g(3)$?
   (c) En déduire le minimum de g sur $[-2;6]$.

Exercice 7.H A l'occasion des soldes, une commerçante baisse tous ses prix de 30%. On note respectivement B et R les fonctions qui, au prix x en euros, associent le montant de la baisse (fonction B) et le nouveau prix (fonction R).

1. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions B et R
2. Donner l'expression de B et R en fonction de x
3. Donner le sens de variation de B et R, justifier et interpréter.

Exercice 7.I Le coût de production pour la rédaction et le tirage d'un journal à diffusion interne comprend :

- des frais fixes d'un montant de 80€
- des frais variables, proportionnels au nombre n de journaux imprimés, 40€ par journal.

1. Exprimer, en fonction de n, pour $100 \leqslant n \leqslant 400$, le coût total $C(n)$ d'une édition mensuelle de n journaux, puis le coût moyen mensuel par journal,$C_m(n) = \frac{C(n)}{n}$
2. On considère la fonction f définie sur $[100;400]$ par $f(x) = \frac{80}{x} + 40$. Quand le nombre de tirages augmente,
   (a) Comment varie le coût total ? Justifier.
   (b) Comment varie le coût moyen ? Justifier.
3. Représenter graphiquement la fonction f. Estimer graphiquement la production minimale pour que le coût moyen reste inférieur à 40,70€

Exercice 7.J Pour cet exercice, vous admettrez (provisoirement) que la fonction carré : $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$.
Soit f définie sur l'intervalle $[-4;4]$ par $f(x) = x^4 - 18x^2$

1. En utilisant votre calculatrice, conjecturez le tableau de variation de f.
2. (a) Grâce à l'indication donnée en début d'exercice, résoudre l'inéquation $x^2 \leqslant 18$
   (b) On rappelle que f admet un maximum en a ssi $\forall x \in D_f,\ f(x) \leqslant f(a)$.
   Démontrer par le calcul que f admet un maximum local en 0 sur l'intervalle $[-4;4]$.